FEUILLE DE TD

Logique et raisonnement

Pour démarrer . . .

Exercice 1. Ecrire les ensembles suivants sous la forme d'intervalles ou d'ensembles plus simples :

1. $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x^2 \leq 4\} =$ . . . .,
2. $\{2k \mid k \in \mathbb{N}\} \cup \{2p+1 \mid p \in \mathbb{N}\} =$ . . .,
3. $\{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cap \{x \in \mathbb{R} \mid |x| > 1\} =$ . .,

Exercice 2. Compléter les pointillés.

1. La fonction exp est à valeurs dans . . . . ..
2. La fonction . . . . est à valeurs dans $[-1, 1]$.
3. La représentation graphique de la fonction $x \longmapsto |x|$ est symétrique par rapport à . . . .
4. Le point M de coordonnées $(0, \sqrt{3})$ appartient à l'axe des . . . .
5. La courbe représentative de la fonction ln coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées . . . .
6. L'image de $\dfrac{3\pi}{4}$ par la fonction sin est . . . .
7. L'image de 2 par la fonction $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$; $x \longmapsto x^2 + \exp(x)$ vaut . . . .
8. Soit $x \in]0, 1[$. On a $\ln(x) \in$ . . . .
9. Les coordonnées des points d'intersection des courbes représentatives des fonctions $x \longmapsto \dfrac{6}{x}$ et $x \longmapsto x + 5$ sont . . . .
10. Les droites d'équation $y = 2x + 1$ et $y = -x - 2$ sont sécantes au point de coordonnées . . . .

Exercice 3.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Notons $P(n)$ la proposition « n est un multiple de 2 » et $Q(n)$ la proposition « $n^2 + n$ est un multiple de 3 ».

1. Déterminer les valeurs de vérité de « $(P \ \ et \ \ Q)(n)$ » (qui signifie « $P(n)$ *et* $Q(n)$ ») lorsque n est un entier entre 5 et 15.
2. Quels sont les entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $(P \ et \ Q)(n)$ est vraie ?

Exercice 4. Compléter, lorsque c'est possible, avec $\forall$ ou $\exists$ pour que les énoncés suivants soient vrais.

1. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, (x+1)^2 = x^2 + 2x + 1$
2. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, x^2 + 3x + 2 = 0$
3. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, 2x + 1 = 0$
4. . . . . . . $x \in \mathbb{R}, x^2 + 2x + 3 \neq 0$.

Exercice 5. Compléter les phrases mathématiques suivantes par le connecteur logique qui convient : $\Longleftarrow$, $\Longrightarrow$ ou $\Longleftrightarrow$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. $x^2 = 4$ . . . . . . $x = 2$.
2. Soit $z \in \mathbb{C}$. $z = \overline{z}$ . . . . $z \in \mathbb{R}$.
3. $\theta = \pi$ . . . . . . $\mathrm{e}^{2i\theta} = 1$.

Exercice 6. Dire si les propositions suivantes sont vraies ou fausses :

1. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^2 - 1 > 0$.
2. $\forall p \in \mathbb{N}$, $p(p-1)$ est pair.
3. $\exists x \in \mathbb{R}$, $(x + 1 = 0$ et $x + 2 = 0)$.
4. $(\exists x \in \mathbb{R},\ x + 1 = 0)$ et $(\exists x \in \mathbb{R},\ x + 2 = 0)$.
5. $\forall (n, m) \in \mathbb{N}^2$, $\sqrt{n} + \sqrt{m} = 0 \Longrightarrow n = m = 0$.
6. $\forall x \in \mathbb{Z}$, $\exists y \in \mathbb{Z}$, $|x - y| > 1$.

Ecrire la négation de chaque proposition.

Exercice 7. Ecrire les propositions suivantes avec des quantificateurs :

1. L'équation $f(x) = 0$ a une unique solution dans $\mathbb{R}$.
2. L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
3. Pour tout réel strictement positif ε, il existe un entier naturel N tel que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à N, on a $|1/n| < \varepsilon$.
4. Tous les nombres réels positifs sont le carré d'au moins un nombre réel.
5. Tout nombre rationnel r s'écrit sous la forme $\dfrac{p}{q}$ où p appartient à $\mathbb{Z}$ et q appartient à $\mathbb{N}^*$.
6. Pour tout nombre réel non nul, il existe un nombre réel tel que le produit des deux nombres vaut 1.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction. On considère les propositions suivantes.

— P_1 : « La fonction f est minorée par 1 ».

— P_2 : « Il existe un nombre réel positif x tel que $f(x)$ est positif ».

— P_3 : « La fonction f prend des valeurs aussi grandes que l'on veut ».

— P_4 : « Pour tous réels x et y, la distance entre $f(x)$ et $f(y)$ est plus petite que la distance entre x et y.

1. Ecrire chacune des propositions avec des quantificateurs. Ecrire leur négation.
2. Pour chacune des propositions, donner des exemples de fonctions telles que la proposition soit vraie, puis des exemples de fonctions telles que la proposition soit fausse.

■ *Pour commencer . . .*

Exercice 9.

1. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^3 - n$ est un multiple de 3.
2. Démontrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $n^2 - n$ n'est pas un multiple de 3.

Exercice 10. Les démonstrations suivantes sont fausses. Où sont les erreurs ?

1. Soient a et b deux nombres réels. Supposons que $a = b$. En multipliant par a, on obtient $a^2 = ab$, donc $a^2 - b^2 = ab - b^2$. En factorisant, on en déduit que $(a + b)(a - b) = b(a - b)$, puis, en simplifiant par $a - b$, on obtient $a + b = b$, et donc $a = 0$. a étant un nombre réel quelconque, tout nombre réel est donc nul.
2. On cherche les réels x tels que $x^2 + x + 1 = 0$. Si $x \in \mathbb{R}$ est solution, x est non nul donc on obtient $x + 1 + \frac{1}{x} = 0$. Or $x + 1 = -x^2$ donc $\frac{1}{x} = x^2$, ce qui donne $x = 1$. Donc 1 est solution et on a $3 = 0$.

Exercice 11. Voici une preuve de la proposition « Tous les chats sont de la même couleur » :

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n la proposition « si $C_1, \ldots, C_n$ sont n chats alors ils ont tous la même couleur ». Prouvons par récurrence forte que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, P_n est vraie.

Initialisation : Si $n = 1$, on considère un chat C. Il est de la même couleur que lui-même, donc P_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$, on suppose que pour tout $1 \leq k \leq n$, P_k est vraie. Montrons P_{n+1} : On considère $C_1, \ldots, C_{n+1}$ un ensemble de $n + 1$ chats. Par hypothèse de récurrence, C_{n+1} est de la même couleur que C_n. À nouveau par hypothèse de récurrence, les n chats $C_1, \ldots, C_n$ sont de la même couleur. On en déduit donc que C_{n+1} a la même couleur que tous les autres chats.

Par récurrence, P_n est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Où est le problème ?

Exercice 12. Démontrer les propositions suivantes, en précisant le type de raisonnement utilisé.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 3^n - 2^n$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x - 1| \leq x^2 - x + 1$.
3. Pour toute fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, il existe une unique fonction paire $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et une unique fonction impaire $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f = g + h$.

4. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Si $x \neq y$ alors $(x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$.
5. Si n est le carré d'un nombre entier non nul alors $2n$ n'est pas le carré d'un nombre entier.
6. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $4^n + 5$ est un multiple de 3.
7. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, 4 divise n^2 ou 4 divise $n^2 - 1$.
8. Pour tous $a < b$ réels, $[a,b] = \{ta + (1-t)b \mid t \in [0,1]\}$.
9. Il existe une unique fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,
$$f(x)f(y) - f(xy) = x + y.$$
10. Soit x un réel. Si, pour tout $\varepsilon > 0$, $|x| < \varepsilon$, alors $x = 0$.

Exercice 13. Démontrer par récurrence les propositions suivantes :

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(1+x)^n \geq 1 + nx$.
3. Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $v_1 = 3$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$v_{n+1} = \displaystyle\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} v_k$.
Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 3n$.

■ *Pour continuer . . .*

Exercice 14. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que

— f est **injective**, si $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \big(f(x) = f(y) \Rightarrow x = y\big)$;
— f est **surjective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists x \in \mathbb{R}, f(x) = y$;
— f est **bijective**, si $\forall y \in \mathbb{R}, \exists !\, x \in \mathbb{R}, f(x) = y$.

1. Montrer qu'une fonction strictement monotone est injective.
2. Une fonction monotone est-elle toujours injective ?
3. La fonction exp est-elle surjective ? Montrer que la fonction $x \longmapsto x(x-1)(x-2)$ est surjective.
4. Une fonction peut-elle être surjective et injective mais non bijective ?

Exercice 15. On dit qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ si, par définition,
$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ (n \geq N \Rightarrow |u_n - \ell| < \varepsilon).$$

1. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq |v_n|$ et la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0.
2. Soient $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deux suites. Démontrer que si $(u_n)_{n \in}$ tend vers ℓ_1 et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers ℓ_2, alors la somme $(u_n + v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $\ell_1 + \ell_2$.

On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est continue en 0 si :
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}, \left(|x| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(0)| < \varepsilon\right).$$

Montrer que si f est continue en 0 et si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers 0, la suite $\big(f(u_n)\big)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $f(0)$.

Exercice 16. Le but de cet exercice est de démontrer le théorème suivant :

Théorème : Il existe une infinité de nombres premiers.

Voici une preuve trop peu détaillée : « si $p_1, \ldots, p_r$ sont tous les nombres premiers, alors $n = p_1 \cdots p_r + 1$ est premier ». Rédiger proprement cette preuve.

Exercice 17. Si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on définit la fonction $f + g$ par : $\forall x \in \mathbb{R}$, $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

1. Soit $T > 0$. Montrer que si $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sont T-périodiques, alors $f + g$ est T-périodique.
2. Soient $T_1 > 0$ et $T_2 > 0$, soient $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T_1-périodique et $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ T_2-périodique. On suppose que $\dfrac{T_1}{T_2} \in \mathbb{Q}$. Montrer que $f + g$ est périodique.
3. On définit $f : x \longmapsto \cos(x)$ et $g : x \longmapsto \cos\left(\frac{x}{2\pi}\right)$. La fonction $f + g$ est-elle périodique ?